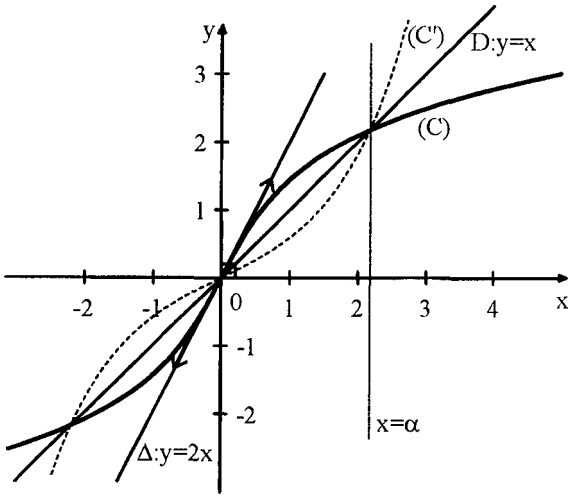
d- Tenant compte des résultats précédentes et du fait que $\forall x \in IR$;
$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}} > 0.$



3/ Désignons par A(a) l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0, y = 0$ et $x = a$.

$$A(a) = \int_0^a f(x)dx = \int_0^a \text{Log}\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)dx$$

$$\begin{pmatrix} u'(x) = 1 & \curvearrowright & u(x) = x \\ v(x) = f(x) & \curvearrowright & v'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}} \end{pmatrix}$$

$$= [xf(x)]_0^a - \int_0^a \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}dx = [xf(x)]_0^a - \frac{1}{2}\int_0^a \frac{4\times 2x}{2\sqrt{4x^2+1}}dx$$

$$= a\text{Log}\left(2a + \sqrt{4a^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left[\sqrt{4x^2+1}\right]_0^a$$

$$= a\text{Log}\left(2a + \sqrt{4a^2+1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+1} + \frac{1}{2}.$$

B-1/a- f est continue et strictement croissante sur IR
$\Rightarrow$ f réalise une bijection de IR sur $I = f(IR) = IR$

b- $(C') = S_D((C))$ avec D:y=x. (Voir figure)

c- $\forall x \in I; f\left(\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})\right)$

$$f\left(\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})\right) = \text{Log}\left(2\frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) + \sqrt{4\frac{1}{4^2}(e^x - e^{-x})^2 + 1}\right)$$